

Equações diferenciais pantográficas: retardo proporcional

Paulo Ruffino
Departamento de Matemática
Universidade Estadual de Campinas
ruffino@ime.unicamp.br

27 de Maio de 2014*

1 Introdução e Definição

A intenção dessas notas é mostrar aos leitores um tipo curioso de equações diferenciais ordinárias com retardo, isto é, equações diferenciais cujas derivadas dependem, de uma maneira peculiar, do passado da solução. São as chamadas equações com retardo proporcional, ou equações pantográficas.

Como motivação geral para equações com retardo, não faltam exemplos de fenômenos na natureza que são modelados desta maneira. Se uma estrela tem sua massa variando com o tempo, dadas as distâncias astronômicas envolvidas, os planetas que orbitam ao redor dela só sentem essa variação algum tempo depois. Pensando no nosso Sol, por exemplo: uma hipotética explosão demoraria oito minutos para ser sentida no nosso planeta. Modelos biológicos, econômicos, bioquímicos, hidráulicos e vários outros sistemas, intrinsecamente tem um comportamento com retardo. Até mesmo circuitos eletrônicos apresentam atrasos de nanossegundos que em altas frequências precisam ser considerados. Esse tipo de raciocínio pode ser levado ao extremo a ponto de dizermos que todo fenômeno da natureza, mesmo nos problemas clássicos, apresenta algum retardo: uns mais perceptíveis do que outros.

Tipicamente, nos modelos de equações com retardo existe uma função (funcional, linear ou não) que associa para cada trajetória em um intervalo de tempo no “passado imediato” dessa solução, uma velocidade da solução no ponto em consideração.

O tipo de equação diferencial com retardo mais conhecida é a com retardo constante, isto é, em que a derivada do sistema no instante t depende somente de onde o sistema estava no instante $t - r$, para um certo tempo de retardo fixo $r > 0$. Mais precisamente: seja $\eta : [-r, 0) \rightarrow \mathbf{R}$ uma função contínua em \mathbf{R} (a condição inicial) e considere o seguinte problema: encontrar uma função contínua $x : [-r, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ que satisfaça

$$x'(t) = F(x(t - r)) \quad (1)$$

para $t > 0$ com $x(t) = \eta(t)$ para $t \in [-r, 0]$, onde F é uma função (campo de vetores) contínua. Equações deste tipo já são relativamente bem conhecidas, figuram em textos clássicos da área, ver por exemplo J. Hale [2] e as referências ali contidas. Variações dessas equações incluem sua extensão para variedades diferenciáveis (via transporte paralelo ou

*retardo`pantografico`2014-05-24.tex

não, por exemplo Oliva [9]) e adição de perturbações estocásticas, ver por exemplo [7], [8], entre outros trabalhos, desses e de outros autores.

Neste texto queremos chamar a atenção dos leitores para um outro tipo especial de equações com retardo, relativamente pouco conhecido, onde o parâmetro no tempo que define o campo de vetor que dirige sua solução tem um retardo crescente, que é proporcional ao tempo. Fixamos a proporção do retardo $q \in (0, 1)$ e um ponto base $a \geq 0$. Considere uma função inicial $\eta : [qa, a] \rightarrow \mathbf{R}$ contínua. Dada uma função (campo de vetores) $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, considere a equação diferencial com retardo:

$$x'(t) = F(x(qt)). \quad (2)$$

A solução é uma função contínua $x(t)$ definida em algum sub-intervalo de $(qa, +\infty)$ de tal maneira que para $t \in [qa, a]$, temos $x(t) = \eta(t)$. Equações deste tipo são chamadas por alguns autores de *equações diferenciais pantográficas*, ver por exemplo [3], [5] e [6].

A equação pantográfica modela por exemplo a situação de duas partículas se movendo na reta, uma mais lenta que a outra por um fator $q \in (0, 1)$, onde a partícula que está a frente, mais rápida, obedece comandos de velocidade dados em função da posição da segunda partícula, mais lenta. Outras situações onde as equações pantográficas podem aparecer é em sistema com duas escalas de tempo, por exemplo nas estruturas onde se estudam os chamados “princípios de médias”. Na próxima seção mostraremos propriedades básicas interessantes dessas equações.

2 Propriedades

2.1 Existência e unicidade de solução

A primeira propriedade que mostraremos é que, diferente das EDO's clássicas, basta que a função F seja contínua para existir uma única solução. Além disso, com essa hipótese, a solução não explode em tempo finito, i.e. está definida para todo $t \geq qa$.

Teorema 1. *Considere a equação com retardo pantográfico (2), onde a função F é contínua. Dada uma condição inicial contínua (integrável) $\eta : [qa, a] \rightarrow \mathbf{R}$, com $a \geq 0$ e $q \in (0, 1)$ existe uma única solução $x(t)$ para essa equação no intervalo $[qa, +\infty)$ tal que $x(t) = \eta(t)$ se $t \in [qa, a]$.*

Demonstração: A solução pode facilmente ser construída. Mostraremos por indução que para todo $k \in \{-1, 0, 1, \dots\}$ a solução existe nos intervalos $[aq^{-k}, aq^{-(k+1)}]$. De fato, no intervalo correspondente a $k = -1$ temos a função inicial $\eta(t)$. Para $k \geq 0$, nossa hipótese de indução é que $x(t)$ esteja definido em $[aq^{-(k-1)}, aq^{-k}]$, então para $t \in [aq^{-k}, aq^{-(k+1)}]$, defina

$$x(t) = x(aq^{-k}) + \int_{aq^{-k}}^t F(x(qs)) \, ds.$$

O integrando está bem definido neste intervalo. Além disso, a continuidade da F garante também que $x(t)$ está bem definido (e não vai para infinito) em $t \in [aq^{-k}, aq^{-(k+1)}]$.

Para verificarmos a unicidade, suponha que $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$ sejam soluções para a mesma função inicial $\eta(t)$ no intervalo $[qa, a]$. Se o conjunto $D = \{t \geq qa : x(t) \neq \tilde{x}(t)\}$ for diferente de vazio, então D possui um ínfimo $t_0 \in \mathbf{R}$. Por continuidade de $x(t)$ e $\tilde{x}(t)$, existe um $t \in (t_0, t_0 q^{-1}) \cap D$. Então, para esse valor de t :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t F(x(qs)) \, ds = \tilde{x}(t_0) + \int_{t_0}^t F(\tilde{x}(qs)) \, ds = \tilde{x}(t)$$

já que $\tilde{x}(qs) = x(qs)$ para $s \in [t_0, t_0 q^{-1}]$, que contém o intervalo de integração. Essa contradição mostra que o conjunto D é vazio.

□

2.2 Condição inicial degenerada para um ponto

Diferente das equações com retardo constante (1), curiosamente nossas equações com retardo pantográfico (2) podem ter suas condições (funções) iniciais degeneradas num único ponto: em $t = 0$ defina $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}$, como nas EDO's clássicas. Isso corresponde a tomar o parâmetro $a = 0$ no teorema acima e $\eta(a) = x(0)$.

A título de exemplo, vamos descrever a solução de uma equação diferencial pantográfica linear em termos de sua série de Taylor centrada em $a = 0$. Considere então a equação com condição inicial:

$$\begin{cases} x' &= \lambda x(qt), \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \quad (3)$$

Então uma solução fundamental $\varphi_t : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $\varphi'(t) = \lambda \varphi(qt)$ é infinitamente derivável e sua n -ésima derivada satisfaz

$$\varphi^{(n)}(t) = \lambda^n q^{1+2+\dots+(n-1)} \varphi(qt)$$

Assumindo $\varphi(0) = 1$ temos então

$$\varphi^{(n)}(0) = \lambda^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Portanto a fórmula de Taylor nos dá a solução fundamental na forma

$$\varphi(t) = 1 + (\lambda t) + \frac{q(\lambda t)^2}{2!} + \frac{q^3(\lambda t)^3}{3!} + \dots + \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}(\lambda t)^n}{n!} + \dots \quad (4)$$

que converge absolutamente para todo $t \in \mathbf{R}$. Para $\lambda > 0$ temos $x(t)$ crescente com $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$. Para $\lambda < 0$ temos $x(t)$ decrescente em uma vizinhança do zero e cruza o zero (ver Teorema 3 e item 1 dos Comentários Finais).

Para ver uma fórmula de Taylor numa situação mais geral, incluindo um termo extra linear sem retardo veja por exemplo [5, Eq. 2.2].

2.3 Propriedade de reconstrução para $t < qa$ (voltando no tempo)

Tipicamente, nas equações com retardo, não faz sentido perguntarmos por uma solução com o tempo antes da função inicial, isto é, para $t < qa$, já que não temos informação sobre a derivada nesse intervalo. No entanto, em situações especiais podemos de fato estender essa solução para algum intervalo antes de qa . Essa é a chamada propriedade de reconstrução das equações com retardo. Para isso, suponha que

- 1) a função inicial $\eta : [qa, a] \rightarrow \mathbf{R}$ seja de classe C^1 em $[qa, a]$,
- 2) a derivada lateral de η em a satisfaz $\eta'(a) = F(\eta(qa))$,
- 3) a função de coeficientes (campo de vetores) $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ seja inversível.

Verifique que temos então uma solução contínua $x(t)$ em $[q^2a, \infty)$ tal que em $t \in [q^2a, qa]$ temos

$$x(t) = F^{-1}(\eta'(tq^{-1})).$$

Podemos continuar usando esse mesmo argumento de reconstrução para uma extensão nos outros intervalos $[aq^{n+1}, aq^n]$ com $n > 2$, mas isso requer hipóteses ainda mais fortes: η de classe C^n , compatibilidade das derivadas laterais nos extremos dos intervalos (para garantir continuidade) e que F tenha inversa derivável.

2.4 Equação linear e crescimento exponencial

Muitas equações diferenciais lineares tem soluções formalmente como $\exp\{\alpha t\}$, onde α é calculado a partir de uma equação característica. No caso de uma equação linear com retardo constante $r > 0$, $x'(t) = \lambda x(t - r)$, soluções deste tipo ainda existem, onde α são soluções de equações transcendentais do tipo $\alpha = \lambda e^{-\alpha r}$. Isso garante a possibilidade de algum crescimento exponencial, um fenômeno típico de soluções de equações lineares. No entanto, as equações lineares com retardo proporcional $x'(t) = \lambda x(qt)$ não têm equações características (verifique!). Mostraremos que as soluções não têm comportamento exponencial, é o que mostra os próximos dois resultados:

Teorema 2. *A solução de $x'(t) = \lambda x(qt)$ com $q \in (0, 1)$, $\lambda \geq 0$ e $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^*$ não tem crescimento exponencial, isto é*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |x(t)| = 0.$$

Demonstração: Usando o fato de que

$$\frac{d}{dt} \log |x(t)| = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{\lambda x(qt)}{x(t)},$$

temos que o crescimento exponencial é dado por

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{t} \int_0^t \frac{x(qs)}{x(s)} ds.$$

O resultado fica demonstrado se verificarmos que $\frac{x(qt)}{x(t)}$ é decrescente e tende para zero. Mas de fato, para todo $t \geq 0$ (tomando $a = 0$) temos

$$x(t) = x(qt) + \int_{qt}^t x(qs) ds.$$

Assim, dividindo os dois lados da equação acima por $x(qt)$ e lembrando que $x(t)$ é crescente temos que o novo integrando $\frac{x(qs)}{x(qt)} \geq 1$ para $s \in [qt, t]$. Portanto $\frac{x(t)}{x(qt)}$ é crescente e tende a infinito quando t vai para infinito. □

O limite no enunciado do teorema acima é conhecido na literatura como *expoente de Lyapunov*, neste caso esse expoente $\alpha = 0$. É bem conhecido que em sistemas lineares canônicos (sem retardo) em dimensão superiores esses expoentes dependem do subspaço onde está a condição inicial e são dados pela parte real dos autovalores da matriz de coeficientes. Voltando para o caso unidimensional e retardo pantográfico, mostramos que para coeficientes $\lambda < 0$, tampouco temos comportamento exponencial:

Teorema 3. *A solução de $x'(t) = -\lambda x(qt)$ com $q \in (0, 1)$, $\lambda > 0$ e $x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^*$ muda de sinal.*

Demonstração: Vamos mostrar inicialmente que a solução atinge o zero pelo menos uma vez no intervalo $\left(0, \frac{1}{\lambda(1-q)}\right]$. Sem perda de generalidade, vamos assumir que $x(0) > 0$. Temos que $x(t)$ é sempre decrescente antes de chegar no zero. Suponha que $x(t)$ ainda seja estritamente positivo em $[0, t_0]$, com $t_0 = \frac{q}{\lambda(1-q)}$ (caso contrário acabou essa parte da demonstração). Precisamos mostrar que neste caso $x(t)$ cruza o zero no intervalo $(t_0, t_0 q^{-1}]$. De fato, usando que para todo $s \in (t_0, t_0 q^{-1}]$, vale $x(t_0) \leq x(qs)$, então temos, para todo t neste mesmo intervalo:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) - \lambda \int_{t_0}^t x(qs) ds \\ &\leq x(t_0) - \lambda(t - t_0)x(t_0) \\ &= x(t_0)(1 - \lambda(t - t_0)) \end{aligned}$$

Agora basta notar que o lado direito da desigualdade acima se anula quando $t = t_0 q^{-1}$.

Se chamarmos de r_1 a primeira raiz da solução, i.e. o tempo onde $x(t)$ cruza o zero pela primeira vez, então no ponto de cruzamento temos que a solução ainda é decrescente, porque $x'(r_1) = -\lambda x(qr_1) < 0$. Portanto a solução, depois de r_1 decresce até chegar em mínimo local estritamente negativo em $t = r_1 q^{-1}$, primeira vez onde a derivada se anula. \square

2.5 Comentários finais

1. Ainda sobre a equação linear tratada no último teorema acima $x'(t) = -\lambda x(qt)$, com $\lambda > 0$. Possivelmente exista uma demonstração elementar (como a demonstração do Teorema 2) de que a solução cruza o zero uma infinidade de vezes. Deixamos aqui essa questão para o leitor interessado. Outra pergunta que deixo em aberto neste contexto é a estabilidade desta solução: isto é, se a solução fica alternando valores positivos e negativos (não periodicamente), os máximos e mínimos locais terão módulo limitado quando t vai para infinito? Como essa estabilidade (ou não) depende dos parâmetros q e λ ? Para ver mais propriedades sobre o comportamento assintótico, neste caso e em outros mais gerais, veja por exemplo [6].

2. Outro fato curioso nas equações com retardo em geral é o aumento da regularidade da solução quando o tempo t cresce. No caso de equação com retardo proporcional tratado aqui, note que tipicamente temos uma descontinuidade da derivada da solução no ponto a , da mesma maneira, uma descontinuidade da segunda derivada no ponto aq^{-1} e assim por diante de modo que no ponto aq^{-k} temos uma descontinuidade na $(k+1)$ -ésima derivada. No interior dos intervalos (aq^{-k}, aq^{-k-1}) o mesmo fenômeno se passa: se a condição inicial tiver regularidade de classe C^l no intervalo inicial $[aq, a]$ então a solução vai ter regularidade C^{l+k} no intervalo (aq^{-k+1}, aq^{-k}) . Ou em outras palavras, a solução $x(t)$ tem regularidade crescendo logaritmicamente: apresenta

$$l + 1 + \left\lfloor \frac{\log t - \log a}{\log q^{-1}} \right\rfloor$$

derivadas contínuas em $t \in [qa, \infty) \setminus \{aq^{-k}; k = -1, 0, 1, \dots\}$.

3. Sobre a propriedade de reconstrução (parágrafo 2.3 acima). Pode ser interessante se tivermos explicitamente os critérios para a reconstrução da solução em intervalos ainda mais a esquerda, i.e. em $[q^k a, q^{k-1} a]$ para $k > 2$. No seguinte sentido: em que condições poderíamos nos aproximar da origem $t = 0$? E se isso for possível, em que medida essas condições não conduziram para as soluções das equações mencionadas no parágrafo 2.2, onde a condição inicial degenera para um único ponto? Ainda em outras palavras, será que essa reconstrução só é possível se a condição inicial η for um fragmento de uma solução com condição inicial degenerada? Portanto, dado uma F , essa η seria única (para cada valor limite em $t = 0$)?

4. A exemplo das equações com retardo constante (ver por exemplo [1] e as referências contidas ali), as equações pantográficas também fazem sentido em dinâmicas mais gerais. Por exemplo essas equações podem aparecer em variedades diferenciáveis dotadas de uma conexão afim (riemannianas, por exemplo) que determine um transporte paralelo ao longo de curvas diferenciáveis. De fato, dada uma curva $\eta : [qa, T) \rightarrow M$ diferenciável, denote por $//_{s,t} : T_{\eta(s)}M \rightarrow T_{\eta(t)}M$ o transporte paralelo entre os pontos $\eta(s)$ e $\eta(t)$, para $qa \leq s \leq t$. Assim, uma equação com retardo proporcional nesta variedade se escreve como

$$x'(t) = //_{qt,t} X(x(qt)).$$

com X um campo de vetores, $a \leq t$ e com condições iniciais $x(t) = \eta(t)$ em $t \in [qa, a]$. Até onde nos consta, ainda estão em aberto questões relativas a propriedades das soluções das equações pantográficas neste contexto.

Referências

- [1] Pedro J. Catuogno e Paulo R. Ruffino – Geometry of stochastic delay differential equations. *Electronic Communication in Probability*, 10 (2005), 190-195.
- [2] Jack K. Hale e S. M. Verduyn Lunel – *Introduction to Functional-Differential Equations*, vol. 99 Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [3] Arie Iserles e Y. Liu – On pantograph integro-differential equations. *J. Integral Equations Applic.* **6** (2), (1994) , 213–237.
- [4] Arie Iserles – On the generalized pantograph functional-differential equation, *European J. Appl. Math.*, 4 (1993), pp. 1–38
- [5] Arie Iserles e Y. Liu – On neutral functional-differential equations with proportional delays. *J. Math. Anal. Applic.* 207 (1997) , 73–95.
- [6] Tosio Kato e J. B. McLeod, The functional-differential equation $y(x) = ay(\lambda x) + by(x)$, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), pp. 891–937.
- [7] Langevin, R.; Oliva, W. M. and De Oliveira, J. C. F. – Retarded functional-differential equations with white noise perturbations. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* 55 (1991), no. 2, 671–687.
- [8] Mohammed, S. E. A. *Stochastic functional differential equations*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

- [9] Oliva, W. M. – Retarded equations on the sphere induced by linear equations. *J. Differential Equations* 49 (1983), no. 3, 453–472.
- [10] Sotomayor – *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projeto Euclides. IMPA, 1979.